高知大学

2016年 理学部・医学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ ある箱に1から5までの整数のうちひとつが書かれたカードがそれぞれ1枚入っている．そこから1枚カードをひき，数字を確認してから元の箱に戻す．このような操作を繰り返したとき，k 回目に取り出したカードの数字を A_k とし，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$$

とする．このとき，T_n が奇数となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

(1) T_{n+1} が奇数となるのは

$$\begin{cases} T_n \text{ が奇数で } A_{n+1} \text{ が偶数} \\ T_n \text{ が偶数で } A_{n+1} \text{ が奇数} \end{cases}$$

のときであるから

$$p_{n+1} = p_n \cdot \frac{2}{5} + (1-p_n)\cdot\frac{3}{5}$$

$$\therefore \underline{p_{n+1} = -\frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}} \;//$$

(2) $p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は 初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$，公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列

$$\therefore p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \underline{p_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}} \;//$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{1 - \underbrace{\left(-\frac{1}{5}\right)^n}_{\to 0}\right\}$$

$$= \underline{\frac{1}{2}} \;//$$