2012年 文系 第4問

$\boxed{4}$ 平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p，q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p，q を求めよ．

(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a} \cdot \vec{x} \leqq 1, \quad 1 \leqq \vec{b} \cdot \vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(1) $|\vec{c}|^2 = p^2|\vec{a}|^2 + q^2|\vec{b}|^2 + 2pq\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

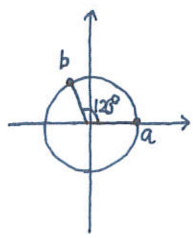
$= p^2 + q^2 - pq$

$\therefore$ $|\vec{c}| = 1$ より．$p^2 + q^2 - pq = 1$ …①

$\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(p\vec{a} + q\vec{b}) = p|\vec{a}|^2 + q\,\vec{a}\cdot\vec{b} = p - \frac{1}{2}q$　$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c} = 0$ より．$q = 2p$ …②

②を①に代入して．$p^2 + 4p^2 - 2p^2 = 1$　$\therefore$ $p^2 = \frac{1}{3}$　$p > 0$ より．$p = \frac{\sqrt{3}}{3}$

②より．$q = \frac{2\sqrt{3}}{3}$　以上より．$\underline{p = \frac{\sqrt{3}}{3},\ q = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$ //



(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと．$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = -\frac{1}{2}$ より．$\theta = 120°$

$\therefore$ $\vec{a} = (1, 0)$，$\vec{b} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ として考える．$\vec{x} = (s, t)$ とおくと．

$\vec{a}\cdot\vec{x} = s$ より，$-1 \leqq s \leqq 1$ …③

$\vec{b}\cdot\vec{x} = -\frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t$ より，

$1 \leqq -\frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t \leqq 2 \iff \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{2\sqrt{3}}{3} \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s + \frac{4\sqrt{3}}{3}$ …④

2枚目につづく

2012年 文系 第4問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

$\boxed{4}$ 平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = -\frac{1}{2}$$

を満たすとする．ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す．以下の問いに答えよ．

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく．このとき，次の条件

$$|\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = 0, \quad p > 0$$

を満たす実数 p, q を求めよ．

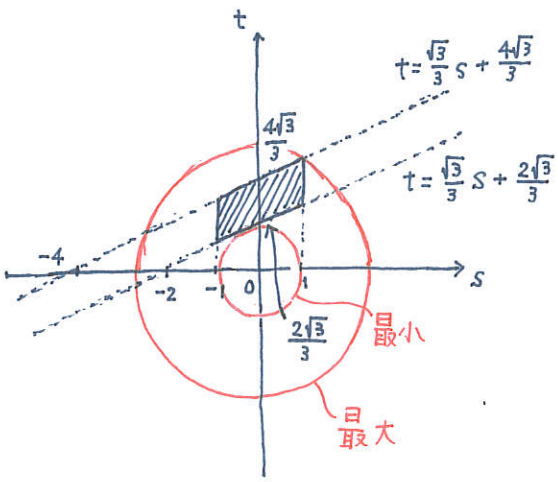
(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が

$$-1 \leqq \vec{a}\cdot\vec{x} \leqq 1, \quad 1 \leqq \vec{b}\cdot\vec{x} \leqq 2$$

を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) のつづき．

③，④より右図の斜線部分（境界線を含む）



$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{s^2+t^2} = k$ とおくと．

$s^2+t^2=k^2$

$\therefore$ $|\vec{x}|$ が最小となるのは．

円 $s^2+t^2=k^2$ と直線 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Leftrightarrow s-\sqrt{3}t+2=0$

が接するときなので，点と直線のキョリ公式より．

$k(\text{半径}) = \dfrac{|2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}} \Leftrightarrow 2k=2$

$\Leftrightarrow k=1$ 　このとき $|\vec{x}|=1$

$|\vec{x}|$ が最大となるのは．円 $s^2+t^2=k^2$ が点 $\left(1, \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ を通るときであり．

平行四辺形の右上の点．

$1+\frac{25}{3}=k^2$ 　　$\therefore |\vec{x}| = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

以上より． $\underline{1 \leqq |\vec{x}| \leqq \frac{2\sqrt{21}}{3}}$ //