0001850459418999

高知大学

2014 年 第 4 問

数理 石井K

4 $f(x)=x(x-1)(x+1)$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ が極大，極小になるときの x と，その極大値，極小値を求めよ．

(2) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(3) x が $|x-1|<\dfrac{1}{2}$ をみたすとき，点 $(x,\ f(x))$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれることを示せ．

(4) 1 以下の正の数 r に対して，x が $|x-1|<r$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ f(x))$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 $10r$ の円の内部に含まれることを示せ．

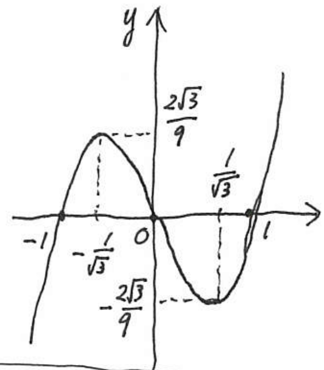
(1) $f(x)=x^3-x$ より $f'(x)=3x^2-1$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは、$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$
		極大		極小	

右の増減表より $\begin{cases} \text{極大値} \ \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \ \left(x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \text{極小値} \ -\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \ \left(x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$ //

(2) (1) より 右のグラフ



(3) 点 $(x, f(x))$ と点 $(1, 0)$ のキョリ d は

$$d=\sqrt{(x-1)^2+x^2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=|x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2}$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2} \quad \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2} \text{ より}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{241}}{4}$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{256}}{4}$$

$$=2$$

$$<3$$

$\therefore$ $(1, 0)$ を中心とする半径 3 の円の内部に含まれる ☒

(4) (3) と同様にして．$(1-r<x<1+r)$

$$d=\sqrt{(x-1)^2+x^2(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$=|x-1|\sqrt{1+x^2(x+1)^2}$$

$$<r\sqrt{1+(1+r)^2(2+r)^2}$$

$$<r\cdot\sqrt{1+2^2\cdot3^2}$$

$$=\sqrt{37}\,r$$

$$<\sqrt{100}\,r=10r$$ ☒