0002253636477999

高知大学

2016年 理学部・医学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 実数の定数 k に対して，$f(x)=|5\sin(kx)-6\cos(x^2)+7|$ とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての x に対して，$f(x)\leqq 18$ であることを示せ．

(2) $k=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ のとき，$f(x)=18$ となる x の値の例を一つあげよ．

(3) $k=\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ のとき，$f(x)=18$ となる x の値は存在しないことを示せ．

(4) $f(x)=18$ となる x が存在するような k の値をすべて求めよ．

(1) $-1\leqq \sin(kx)\leqq 1$，$-1\leqq\cos(x^2)\leqq 1$ より

$$-5-6+7\leqq 5\sin(kx)-6\cos(x^2)+7\leqq 5+6+7$$

$$\therefore\ -4\leqq 5\sin(kx)-6\cos(x^2)+7\leqq 18$$

$$\therefore\ f(x)\leqq 18 \quad ▨$$

(2) $k=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ のとき

$$f(x)=18 \iff \sin\frac{\sqrt{\pi}}{2}x=1 \text{ かつ } \cos(x^2)=-1$$

$\therefore$ $f(x)=18$ となる x の値の一つは，$\underline{x=\sqrt{\pi}}$ //

(3) $k=\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$ のとき

$$f(x)=18 \iff \sin\frac{\sqrt{\pi}}{4}x=1 \text{ かつ } \cos(x^2)=-1$$

$$\iff \frac{\sqrt{\pi}}{4}x=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n:\text{整数}) \text{ かつ } x^2=\pi+2m\pi\ (m:\text{整数})$$

$$\iff x=2(4n+1)\sqrt{\pi} \text{ かつ } x=\sqrt{(2m+1)\pi}$$

よって，$2(4n+1)\sqrt{\pi}=\sqrt{(2m+1)\pi}$ より，$4(4n+1)^2=2m+1$

左辺は偶数，右辺は奇数より，これをみたす x の値は存在しない ▨

(4)
$$f(x)=18 \iff \sin(kx)=1 \text{ かつ } \cos(x^2)=-1$$

$$\iff kx=\frac{\pi}{2}+2n\pi \text{ かつ } x^2=\pi+2m\pi$$

$$\iff x=\frac{(4n+1)\pi}{2k} \text{ かつ } x=\sqrt{(2m+1)\pi}$$

よって，$\dfrac{(4n+1)\pi}{2k}=\sqrt{(2m+1)\pi}$ これより，

$\underline{k=\dfrac{(4n+1)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2m+1}}\quad (n\text{は任意の整数},\ m\text{は0以上の任意の整数})}$ //