高知大学

2018 年 理学部・医学部 第 4 問

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

を求めよ．

(2) 正の整数 n に対して，$S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-x^2)^k$ とおく．このとき，任意の実数 x に対して，

$$\left| S_n(x) - \frac{1}{1+x^2} \right| \leqq x^{2(n+1)}$$

が成り立つことを示せ．

(3) (2) の $S_n(x)$ に対して，

$$\left| \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx \right| \leqq 3^{-n}$$

を示せ．

(4) (1)，(3) の結果を用いて，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

を求めよ．