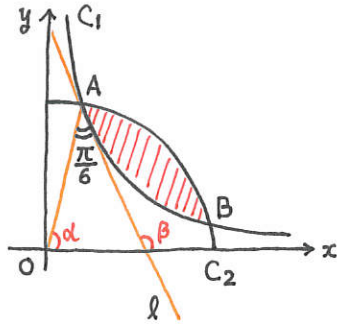
京都大学

2014年 理系 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第1象限にある部分と，原点Oを中心とする円の第1象限にある部分を，それぞれ C_1, C_2 とする．C_1 と C_2 は2つの異なる点A，Bで交わり，点Aにおける C_1 の接線 ℓ と線分OAのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．



C_1 において．$y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より．点 $A\left(t, \dfrac{1}{t}\right)$ $(t>0)$ とおくと．

$\ell : y=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)+\dfrac{1}{t}$ $\therefore \ell : y=-\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}$

また．直線 $OA : y=\dfrac{1}{t^2}x$ であるから．

図のように．OAと ℓ が x 軸の正の向きとなす角をそれぞれ α, β とおくと．

$\tan(\beta-\alpha)=\tan\dfrac{\pi}{6}$ $\therefore \dfrac{-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}}{1+\left(-\frac{1}{t^2}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \dfrac{-2t^2}{t^4-1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore t^4+2\sqrt{3}t^2-1=0$ $t^2>0$ より．$t^2=2-\sqrt{3}$

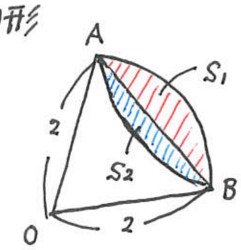
$\therefore t>0$ より $t=\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

このとき，$\dfrac{1}{t}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ なので，$A\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

点A，Bは $y=x$ に関して対称なので，$B\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$

また，円の半径 r は $r=OA=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$

$AB=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2$ $\therefore \triangle OAB$ は正三角形



求める面積を S とおくと．右の図のように $S=S_1+S_2$ となる．

$S_1=$(扇形 OAB) $-$ (正三角形 OAB)

$=\pi\cdot 2^2\cdot\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}$

$=\dfrac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

$S_2=\displaystyle\int_\alpha^\beta -x+\sqrt{6}-\frac{1}{x}\,dx$ $\left(\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \beta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right.$ とおくと．直線 $AB : y=-x+\sqrt{6}$ より$\left.\right)$

$=\sqrt{3}+\log(2-\sqrt{3})$ $\therefore S=\dfrac{2}{3}\pi+\log(2-\sqrt{3})$ // $\left(S=\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})\right.$ でもよい$\left.\right)$