



2013年工学部第3問

3 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくとき、次の問に答えよ。

- (1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。
 (2) $P^{-1}AP$ を求めよ。
 (3) $B = P^{-1}AP$ とおく。 n が自然数のとき、 B^n を求めよ。
 (4) n が自然数のとき、 A^n を求めよ。

(1) $\det P = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -3$ $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ でもよい

$\therefore P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ //

(2) $P^{-1}AP = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

(3) (2) より、

$B^n = (P^{-1}AP)^n$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

$= \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ //

(4) (3) より、

$\underbrace{(P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}AP) \cdots (P^{-1}AP)}_{n \text{ コ}} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$n \text{ コ}$

かっこをはきして、 $P \cdot P^{-1} = E$ (単位行列) に注意すると、

$P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ ← 両辺、左から P 、右から P^{-1} をかけた

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 2 \cdot 4^n - 2 & 2 \cdot 4^n + 1 \end{pmatrix}$ //