

2013年医学部第3問

3 次の各問いに答えよ。

(1) $x \geq 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ として

$$I_k(x) = \int \frac{(\log x)^k}{x^2} dx$$

とおくとき、 $I_0(x)$ を求め、 $I_{k+1}(x)$ を $I_k(x)$ を用いて表せ。また $I_4(x)$ を求めよ。(2) $x > 0$ で不等式 $\log x \leq \frac{3}{e}x^{\frac{1}{3}}$ が成り立つことを証明せよ。(3) 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^2}{x}$ に関する以下の各問いに答えよ。(i) $y = f(x)$ ($x \geq 1$)の極値、極限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ を調べ、増減表を作り、グラフの概形を描け。(ii) $n > 1$ として、 $y = f(x)$ と2直線 $x = n$, $x = n^2$ および x 軸で囲まれる部分 D_n の面積 S_n を求めよ。(iii) D_n を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 V_n を求めよ。(iv) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nV_n}{(\log n)S_n}$ の値を求めよ。