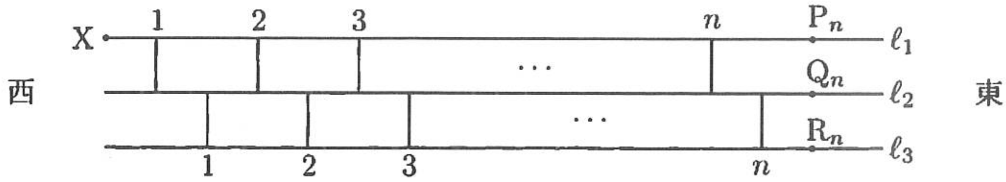
島根大学

2016年 総合理工（数理・情報システム） 第1問

$\boxed{1}$ nを自然数とする．下図のように，3本の平行な道路ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3があり，ℓ_1，ℓ_2をつなぐ縦の道と，ℓ_2，ℓ_3をつなぐ縦の道がそれぞれn本ずつ，交互に配置されているとする．



次の規則に従い図のXから出発してP_n，Q_n，R_nに到達する経路の個数をそれぞれa_n，b_n，c_nとする．

（規則）ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3は一方通行であり，西方向には進むことができない．また，一度通った縦の道を再び通ることもできない．

次の問いに答えよ．

(1) a_2，b_2を求めよ．

(2) a_{n+1}をa_n，b_nを用いて表せ．

(3) $b_n = c_n$が成り立つことを証明せよ．

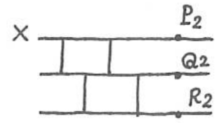
(4) a_1，b_1，a_2，b_2，$\cdots$，a_k，b_k，$\cdots$と順に並べてできる数列を$\{f_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とする．f_{n+2}をf_n，f_{n+1}を用いて表せ．また，それを用いてa_7を求めよ．

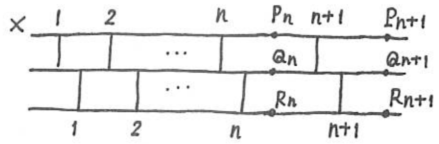
(1) 右図において数えると，

$\underline{a_2 = 2,\ b_2 = 3}$ //

また，$c_2 = 3$

$n=2$のとき





(2) XからP_{n+1}への経路は，

$X \to P_n \to P_{n+1}$ となるものが a_n個

$X \to Q_n \to P_{n+1}$ となるものが b_n個 あるから，

$\underline{a_{n+1} = a_n + b_n}$ // $\cdots$①

(3) (2)と同様に考えると，$b_{n+1} = a_n + b_n + c_n \cdots$②，$c_{n+1} = a_n + b_n + c_n \cdots$③

②と③より，$b_{n+1} = c_{n+1}$ $\therefore b_n = c_n$ $(n \geqq 2)$

$b_1 = c_1$とあわせて，$b_n = c_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$が成り立つ ▨

(4) (i) nが奇数のとき，$n = 2k-1$（k：自然数）とおくと，$f_{n+2} = a_{k+1}$，$f_n = a_k$，$f_{n+1} = b_k$

(2)より，$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

(ii) nが偶数のとき，$n = 2k$とおくと，$f_{n+2} = b_{k+1}$，$f_n = b_k$，$f_{n+1} = a_{k+1}$

①−②より，$a_{n+1} - b_{n+1} = -c_n$ (3)の結果を使って，$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

(i)，(ii)より，いずれの場合も $\underline{f_{n+2} = f_{n+1} + f_n}$ //

$a_3 = a_2 + b_2 = 5$，$b_3 = b_2 + a_3 = 8$，$a_4 = a_3 + b_3 = 13$，$b_4 = b_3 + a_4 = 21$，$a_5 = a_4 + b_4 = 34$，

$b_5 = b_4 + a_5 = 55$，$a_6 = a_5 + b_5 = 89$，$b_6 = b_5 + a_6 = 144$，$a_7 = a_6 + b_6 = \underline{233}$ //