0002256903477999

和歌山大学

2016年 文系 第4問

$\boxed{4}$ $a \geqq 0$ を満たす実数 a に対して，関数

$$f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

の $-1 \leqq t \leqq a$ における最大値を $g(a)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $g(2)$ と $g(5)$ を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲で $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ．

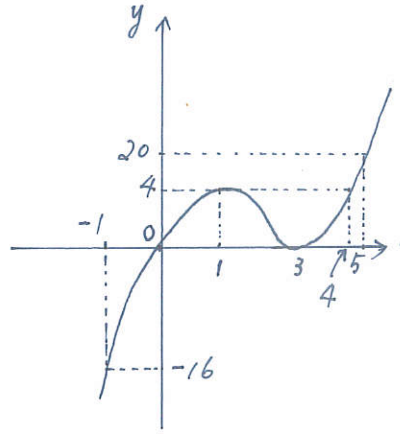
(3) $y = g(x)$ のグラフと x 軸および直線 $x = 5$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(1) $f'(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$= 3(t^2 - 4t + 3)$

$= 3(t-3)(t-1)$

t	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$



$\therefore$ $y = f(t)$ のグラフは増減表より

右のようになる．

よって，$\underline{g(2) = 4,\ g(5) = 20}$ //

(2) $0 \leqq x < 1$ のとき，$g(x) = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(t) = 4 \iff t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$

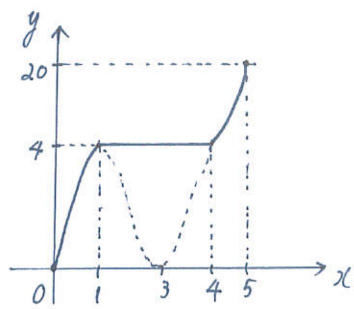
$\iff (t-1)^2(t-4) = 0$

$\iff t = 1, 4$

$\therefore$ $1 \leqq x < 4$ のとき $g(x) = 4$

$4 \leqq x \leqq 5$ のとき，$g(x) = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

以上より，$y = g(x)$ のグラフは右のようになる．



(3) $S = \int_0^1 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx + 3 \cdot 4 + \int_4^5 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^1 + 12 + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_4^5$

$= \frac{11}{4} + 12 + \frac{43}{4}$ $= \underline{\frac{51}{2}}$ //