2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 行列 $A=r\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ で表される1次変換 $f$ について考える．点 $\mathrm{P}_0$ の座標を $(1,\ 0)$ とし，$n$ を正の整数とするとき，$f$ によって点 $\mathrm{P}_{n-1}$ が移される点を $\mathrm{P}_n$ とする．また，$\sum_{k=0}^{n-1}\overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ となる点 $\mathrm{Q}_n$ の座標を $(x_n,\ y_n)$ とし，$n\to\infty$ のときに $x_n$，$y_n$ がともに収束する場合の点 $\mathrm{Q}_n$ の極限値 $\mathrm{Q}\left(\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\right)$ を求めよう．

(1) $r=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$A^3=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}\begin{pmatrix}\boxed{エ} & \boxed{オ} \\ \boxed{オ} & \boxed{エ}\end{pmatrix}$ であり，$\mathrm{P}_7$ の座標は $\left(\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キクケ}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{キクケ}}\right)$ である．

(2) $E-A$ が逆行列をもたない $r$，$\theta$ $(r\geqq 0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ の条件は，$r=\boxed{サ}$ かつ $\theta=\boxed{シ}$ である．ただし，$E$ は単位行列とする．
$E-A$ が逆行列をもつとき，$n$ を2以上の整数とすると
$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})=E-A^n$ より

$$E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}=(E-A)^{-1}(E-A^n)$$

また，$(E-A)^{-1}=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}\begin{pmatrix}1-r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & 1-r\cos\theta\end{pmatrix}$ であるから
$(E-A)^{-1}(E-A^n)=\dfrac{1}{r^2-2r\cos\theta+1}T$ とすると

$$T=\begin{pmatrix}1-r\cos\theta-r^n\boxed{ス}+r^{n+1}\boxed{セ} & -r\sin\theta+r^n\boxed{ソ}-r^{n+1}\boxed{タ} \\ r\sin\theta-r^n\boxed{ソ}+r^{n+1}\boxed{タ} & 1-r\cos\theta-r^n\boxed{ス}+r^{n+1}\boxed{セ}\end{pmatrix}$$

である．ただし，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$ には，次の①～⑥の中から最も適切なものをそれぞれ一つ選ぶこと．なお，同じ選択肢を選んでもよいものとする．

① $\sin n\theta$　② $\cos n\theta$　③ $\sin(n-1)\theta$　④ $\cos(n-1)\theta$　⑤ $\sin(n+1)\theta$　⑥ $\cos(n+1)\theta$

$0\leqq r<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}x_n$，$\lim_{n\to\infty}y_n$ はともに収束し，さらに $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とすると，

$$\mathrm{Q}=\left(\frac{\boxed{チ}-r}{\boxed{ツ}-2r+\boxed{テ}r^2},\ \frac{\sqrt{\boxed{ト}}\,r}{\boxed{ツ}-2r+\boxed{テ}r^2}\right)$$

である．