2016年 理工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 3辺の長さが OP = 5, OQ = 6, PQ = 7 である △OPQ の内心を I とし，直線 OI と辺 PQ の交点を C とする．また，$\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$ とおく．

(1) 面積比 △IOP : △IOQ : △IPQ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ で表せ．

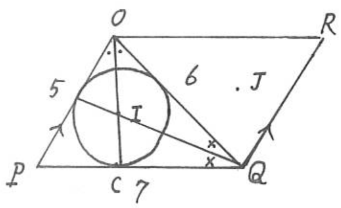
(3) $\overrightarrow{OI}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ で表せ．

(4) 点 R を，$\overrightarrow{QR} = -\vec{p}$ となるようにとり，△OQR の内心を J とする．このとき，$k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}$ と $\vec{p}$ が平行となる k の値を求めよ．

(1) 内接円の半径を r とすると．

$\triangle IOP = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot r$, $\triangle IOQ = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot r$, $\triangle IPQ = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot r$

$\therefore \triangle IOP : \triangle IOQ : \triangle IPQ = \underline{5:6:7}$ //



(2) 直線 OI は ∠O の二等分線より．

$PC : CQ = 5 : 6 \quad \therefore \underline{\overrightarrow{OC} = \frac{6}{11}\vec{p} + \frac{5}{11}\vec{q}}$ //

(3) 直線 QI は ∠Q の二等分線より．

$OI : IC = OQ : QC$

ここで，$QC = 7\times\frac{6}{5+6} = \frac{42}{11}$ より．$OI : IC = 6 : \frac{42}{11} = 11 : 7$

$\therefore \overrightarrow{QI} = \frac{7}{18}\overrightarrow{QO} + \frac{11}{18}\overrightarrow{QC}$

$\therefore \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OQ} = -\frac{7}{18}\overrightarrow{OQ} + \frac{11}{18}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OQ})$

$\therefore \underline{\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\vec{p} + \frac{5}{18}\vec{q}}$ //

(4) 図形の対称性と(3)より．$\overrightarrow{QJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QR} + \frac{5}{18}\overrightarrow{QO}$

$\therefore \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{3}\vec{p} - \frac{5}{18}\vec{q}$

$\therefore \overrightarrow{OJ} = -\frac{1}{3}\vec{p} + \frac{13}{18}\vec{q}$

$\therefore k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} = \frac{1}{3}(k-1)\vec{p} + \frac{1}{18}(5k-13)\vec{q}$

$\therefore k\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ} \parallel \vec{p}$ より．$5k - 13 = 0 \quad \therefore \underline{k = \frac{13}{5}}$ //