2010年 理系 第4問

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の条件を満たすとする．

$$a_1 = 1,\ \ a_2 = 2,\ \ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1 = 2,\ \ b_2 = 6,\ \ b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

さらに行列 A を $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき次が成り立つことを証明せよ．

(1) n が 2 以上の偶数のとき，$A^n = 8^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} a_{n+1} & a_n \\ a_n & a_{n-1} \end{pmatrix}$

(2) n が 3 以上の奇数のとき，$A^n = 8^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} b_{n+1} & b_n \\ b_n & b_{n-1} \end{pmatrix}$