

2010年第3問

3 座標平面において、曲線  $y = e^x$  を  $C$  とし、点  $(1, 0)$  を  $P_1$ 、点  $P_1$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と  $C$  との交点を  $Q_1$  とする。

点  $Q_1$  における  $C$  の接線と  $x$  軸との交点を  $P_2$ 、点  $P_2$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と  $C$  との交点を  $Q_2$  とする。さらに、点  $Q_2$  における  $C$  の接線と  $x$  軸との交点を  $P_3$ 、点  $P_3$  を通り  $x$  軸に垂直な直線と  $C$  との交点を  $Q_3$  とする。

以下同様の操作を繰り返し、 $x$  軸上の点列  $P_1, P_2, P_3, \dots$  と曲線  $C$  上の点列  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  を定める。また、各自然数  $n$  について、曲線  $C$  と 2 つの線分  $Q_n P_{n+1}, P_{n+1} Q_{n+1}$  で囲まれた図形の面積を  $S_n$  として、数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

を定める。次の各問に答えよ。

- (1)  $S_1$  を求めよ。
- (2) 点  $P_n$  の座標を求めよ。
- (3) 無限級数

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

の和を求めよ。