

2014年経済第3問

3 n, m を整数とする。このとき、以下の各問に答えよ。

- (1) n^2 を5で割った余りは0, 1または4であることを証明せよ。
 (2) n を5で割った余りが4のとき, $n^2 + n$ は5の倍数であることを証明せよ。
 (3) $m > 1$ のとき, $m^3 - m$ が6の倍数であることを証明せよ。

(1) $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $n = 5k \pm 2$ のときで分けて考える (k は整数)

(i) $n = 5k$ のとき

$$n^2 = 25k^2 \text{ よって } 5 \text{ で割ると余り } 0$$

(ii) $n = 5k \pm 1$ のとき

$$n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 \text{ よって } 5 \text{ で割ると余り } 1$$

(iii) $n = 5k \pm 2$ のとき

$$n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 \text{ よって } 5 \text{ で割ると余り } 4$$

(i) ~ (iii) より 題意が示せた

(2) (1)より、余りが4になるのは ~~$n = 5k \pm 2$ のとき~~

~~$$\text{このとき } n^2 + n = 25k^2 \pm 20k + 4 + 5k \pm 2$$~~

$$\begin{aligned} n = 5k + 4 \text{ とおくと, } n^2 + n &= n(n+1) \\ &= (5k+4)(5k+5) \\ &= 5(5k+4)(k+1) \text{ よって } 5 \text{ の倍数} \end{aligned}$$

(3) $m^3 - m = m(m+1)(m-1)$

$m-1, m, m+1$ は連続する3つの整数なので

いずれかは3の倍数となる。よってその積も3の倍数

また、同様に、 $m-1, m$ のどちらかは偶数、その積も偶数

以上より $m^3 - m$ は3の倍数かつ偶数

すなわち6の倍数となる