



2016年理学部第2問

2 $f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1}$, $g(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{2(x^2 + x + 1)}$ とする. 次の問いに答えよ.

(1) $g(f(x)) = f(2x + 1)$ が成り立つことを示せ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定め, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = g(b_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める.

(ア) $b_n = f(a_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(イ) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ.

(ウ) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.