



2015年理系第3問

3 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して、関数  $f_n(x) = x^{n+1}(1-x)$  を考える。

- (1) 曲線  $y = f_n(x)$  上の点  $(a_n, f_n(a_n))$  における接線が原点を通るとき、 $a_n$  を  $n$  の式で表せ。ただし、 $a_n > 0$  とする。
- (2)  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で、曲線  $y = f_n(x)$  と  $x$  軸とで囲まれた図形の面積を  $B_n$  とする。また、(1) で求めた  $a_n$  に対して、 $0 \leq x \leq a_n$  の範囲で、曲線  $y = f_n(x)$ 、 $x$  軸、および直線  $x = a_n$  で囲まれた図形の面積を  $C_n$  とする。 $B_n$  および  $C_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3) (2) で求めた  $B_n$  および  $C_n$  に対して、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{B_n}$  を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  が自然対数の底  $e$  であることを用いてよい。