秋田大学

2016年 国際資源学部 第3問

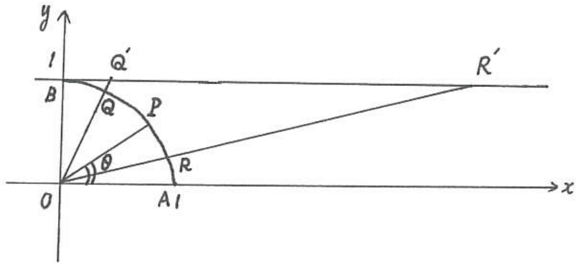
数理 石井K

$\boxed{3}$ 原点をOとする座標平面上に2点A(1, 0), B(0, 1)をとり，Oを中心とする半径1の円の第1象限にある部分をCとする．3点P$(x_1,\ y_1)$，Q$(x_2,\ y_2)$，RはCの周上にあり，$2y_1 = y_2$ および $\angle\mathrm{AOP} = 4\angle\mathrm{AOR}$ を満たすものとする．直線OQと直線$y=1$の交点をQ′，直線ORと直線$y=1$の交点をR′とする．$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 点Qの座標をθを用いて表せ．

(2) 点Q′と点R′の座標をθを用いて表せ．

(3) 点Pが点Aに限りなく近づくとき，$\dfrac{\mathrm{BR'}}{\mathrm{BQ'}}$の極限を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$であることは用いてよい．



(1) $2y_1 = y_2$，$y_1 = \sin\theta$ より

$y_2 = 2\sin\theta$

$x_2^2 + y_2^2 = 1$，$x_2 > 0$ より

$x_2 = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$

$\therefore\ \underline{Q\left(\sqrt{1-4\sin^2\theta},\ 2\sin\theta\right)}$ //

(2) 直線OQ：$y = \dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}x$ に $y=1$ を代入して．$x = \dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta}$　$\therefore\ \underline{Q'\left(\dfrac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\sin\theta},\ 1\right)}$ //

$R\left(\cos\frac{\theta}{4},\ \sin\frac{\theta}{4}\right)$ より 直線OR：$y = \left(\tan\frac{\theta}{4}\right)x$　これに $y=1$ を代入して．$x = \dfrac{1}{\tan\frac{\theta}{4}}$

$\therefore\ \underline{R'\left(\dfrac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}},\ 1\right)}$ //

(3) 点Pが点Aに限りなく近づくとき，$\theta \to 0$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0}\frac{BR'}{BQ'} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}\cdot\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\underbrace{\frac{\frac{\theta}{4}}{\sin\frac{\theta}{4}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin\theta}{\theta}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{8\cos\frac{\theta}{4}}{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}}_{\to 8}$$

$= \underline{8}$ //