0002054635497999

甲南大学

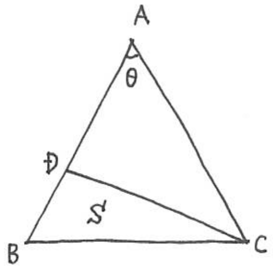
2015年 理系1 第3問

$\boxed{3}$ $0 < \theta < 1$ とする．三角形 ABC において，$AB = AC = \dfrac{1}{\theta}$，$\angle BAC = \theta$ とする．また，辺 AB を $(1-\theta):\theta$ に内分する点を D とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 三角形 BCD の面積を S とする．$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} S$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} BC$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} CD$ を求めよ．



(1) $S = \dfrac{\theta}{(1-\theta)+\theta} \cdot \triangle ABC$

$= \theta \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^2 \cdot \sin\theta$

$= \dfrac{\sin\theta}{2\theta}$

$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ より．$\displaystyle\lim_{\theta \to +0} S = \underline{\frac{1}{2}}$ //

(2) $S = \dfrac{1}{2} \cdot BD \cdot BC \cdot \sin\angle B$ より．

$S = \dfrac{1}{2} \cdot \theta \cdot \dfrac{1}{\theta} \cdot BC \cdot \sin\dfrac{\pi-\theta}{2}$

$= \dfrac{1}{2} BC \cdot \cos\dfrac{\theta}{2}$

∴ (1) より．$\dfrac{1}{2} BC \cdot \cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\theta}{2\theta}$ 　∴ $BC = \dfrac{\sin\theta}{\theta\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\theta\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$

∴ $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} BC = \lim_{\frac{\theta}{2} \to +0} \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}} = \underline{1}$ //

(3) $AD = \dfrac{1-\theta}{\theta}$ 　∴ 余弦定理より．$CD^2 = \left(\dfrac{1-\theta}{\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\theta}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1-\theta}{\theta} \cdot \dfrac{1}{\theta} \cdot \cos\theta$

∴ $CD^2 = \dfrac{2-2\theta+\theta^2-2(1-\theta)\cos\theta}{\theta^2}$

$= \dfrac{2-2\theta+\theta^2-2(1-\theta)\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\theta^2}$

$= 1 + \dfrac{(1-\theta)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}$

∴ $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} CD = \lim_{\frac{\theta}{2} \to +0} \sqrt{1 + \frac{(1-2\cdot\frac{\theta}{2})\sin^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}} = \underline{\sqrt{2}}$ //