甲南大学

2016年 理系1 第3問

$\boxed{3}$ 曲線 $C: y = x^3 - 6x^2 + 8x$ がある．この曲線に傾きが -1 である2本の接線 ℓ_1，ℓ_2 を引く．C と ℓ_1 で囲まれる部分の面積を S_1，C と ℓ_2 で囲まれる部分の面積を S_2 とする．S_1 と S_2 の和を求めよ．

$y' = 3x^2 - 12x + 8$ より，接点を $P(t, t^3-6t^2+8t)$ とすると

接線の傾きは．$3t^2 - 12t + 8 = -1$

$\therefore 3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$3(t-1)(t-3) = 0$

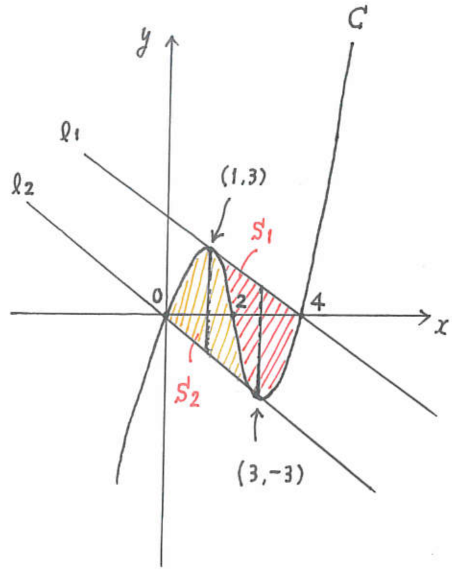
$\therefore t = 1, 3$

このとき，接点は $(1, 3)$，$(3, -3)$ で接線はそれぞれ

$y = -x + 4$，$y = -x$ となる．

ここで，$\ell_1: y = -x + 4$，$\ell_2: y = -x$ とすると，

右図のようになる．



$C: y = x(x-2)(x-4)$ となるから，

$$\therefore S_1 + S_2 = \int_0^1 x^3 - 6x^2 + 8x - (-x)\,dx + \int_1^3 -x + 4 - (-x)\,dx + \int_3^4 -x + 4 - (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^3 - 6x^2 + 9x\,dx + \int_1^3 4\,dx + \int_3^4 -x^3 + 6x^2 - 9x + 4\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^1 + \left[4x\right]_1^3 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x\right]_3^4$$

$$= \frac{1}{4} - 2 + \frac{9}{2} + 12 - 4 - 64 + 128 - 72 + 16 - \left(-\frac{81}{4} + 54 - \frac{81}{2} + 12\right)$$

$$= \underline{\frac{27}{2}} //$$