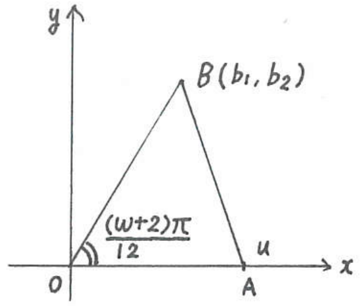
岡山大学

2016年 文系 第3問

$\boxed{3}$ ひとつのサイコロを3回振り，出た目を順に u, v, w とする．そして座標平面上の2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1 = u, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = v\cos\frac{(w+2)\pi}{12}, \quad b_2 = v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める．このとき以下の問いに答えよ．ただし O は原点 $(0,\ 0)$ とする．



(1) △OABが正三角形となる確率を求めよ．

(2) △OABが大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ．

(1) △OABが正三角形 $\iff$ OA = OB かつ $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$

$\iff u = v$ かつ $\frac{(w+2)\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$

$\iff u = v$ かつ $w = 2$

よって，$(u, v, w) = (1, 1, 2), (2, 2, 2), \cdots, (6, 6, 2)$ の6通り

確率は，$\frac{6}{6^3} = \underline{\frac{1}{36}}$ //

(2) △OABの内角はそれぞれ $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ となる

$w > 0$ より，$\frac{(w+2)\pi}{12} > \frac{\pi}{6}$ であるから，$\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$ または $\frac{\pi}{2}$

(i) $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$ のとき

$w = 2$ であり，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{AB}$ または $\mathrm{OB} \perp \mathrm{AB}$

$\mathrm{A}(u, 0)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}v, \frac{\sqrt{3}}{2}v\right)$ であるから，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{AB} \iff u = \frac{1}{2}v$

$\mathrm{OB} \perp \mathrm{AB} \iff \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}v}{\frac{1}{2}v - u} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iff u = 2v$

よって，$(u, v, w) = (1, 2, 2), (2, 4, 2), (3, 6, 2), (2, 1, 2), (4, 2, 2), (6, 3, 2)$ の6通り

(ii) $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{2}$ のとき

$b_1 = 0$ より，$\cos\frac{(w+2)\pi}{12} = 0 \quad \therefore w = 4$

このとき，$\mathrm{A}(u, 0)$, $\mathrm{B}(0, v)$ △OABの辺の比は，$1 : \underbrace{2}_{\text{斜辺}} : \sqrt{3}$ なので

$u = \sqrt{3}v$ または $v = \sqrt{3}u$ であるが，u, v は整数より不適

(i), (ii) より，確率は，$\frac{6}{6^3} = \underline{\frac{1}{36}}$ //