



2014年理系第3問

3 r を $r > 1$ である実数とし, 数列 $\{a_n\}$ を次で定める.

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1}$$

以下の問いに答えよ.

- (1) n が奇数のとき $a_n < r$, n が偶数のとき $a_n > r$ であることを示せ.
- (2) 任意の自然数 n について, $a_{n+2} - r$ を a_n と r を用いて表せ.
- (3) 任意の自然数 n について, 次の不等式を示せ.

$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left(\frac{r-1}{r+1} \right)^2$$

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$ および $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ を求めよ.