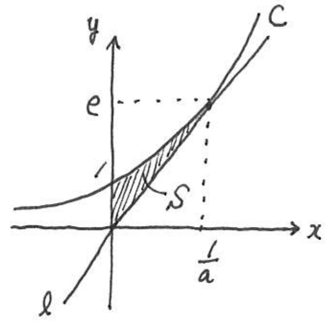
0001671818238999

熊本大学

2014年第4問

$\boxed{4}$ aを正の実数とする．xy平面上の曲線$C: y = e^{ax}$の接線で，原点を通るものをℓとし，Cとℓおよびy軸で囲まれた領域をSとする．以下の問いに答えよ．



(1) Sをx軸の周りに回転して得られる立体の体積V_1を求めよ．

(2) Sをy軸の周りに回転して得られる立体の体積V_2を求めよ．

(3) $V_1 = V_2$となるときのaの値を求めよ．

(1) Cとℓの接点を求めると．

$y' = ae^{ax}$ より．接点を(t, e^{at})とおくと．

$\ell: y = ae^{at}(x-t) + e^{at}$ $\quad \therefore \ell: y = ae^{at}x - tae^{at} + e^{at}$

ℓは原点を通るので，$0 = e^{at}\cdot(-ta+1)$ $\quad e^{at} > 0$ より $t = \frac{1}{a}$

$\therefore$ 接点は$\left(\frac{1}{a}, e\right)$ また，$\ell: y = aex$

$$\therefore V_1 = \pi\int_0^{\frac{1}{a}} (e^{ax})^2 - (aex)^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{a}} e^{2ax} - a^2e^2x^2\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2a}e^{2ax} - \frac{a^2e^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= \underline{\frac{e^2-3}{6a}\pi}$$

(2)で使う

$y = e^{ax} \iff x = \frac{1}{a}\log y$

$y = aex \iff x = \frac{1}{ae}y$

(2) $$V_2 = \pi\int_1^e \left(\frac{1}{ae}y\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\log y\right)^2 dy + \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{ae}y\right)^2 dy$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3a^2e^2}y^3\right]_1^e - \pi\int_1^e \frac{1}{a^2}(y)'(\log y)^2\,dy + \pi\left[\frac{1}{3a^2e^2}y^3\right]_0^1$$

$$= \pi\left(\frac{e^3}{3a^2e^2}\right) - \pi\left[\frac{y}{a^2}(\log y)^2\right]_1^e + \pi\int_1^e \frac{1}{a^2}\cdot y\cdot 2(\log y)\cdot\frac{1}{y}\,dy$$

$$= \pi\cdot\frac{e^3}{3a^2e^2} - \pi\cdot\frac{e}{a^2} + \frac{2}{a^2}\pi\int_1^e y'\cdot\log y\,dy$$

$$= \frac{e^3 - 3e^3}{3a^2e^2}\pi + \frac{2}{a^2}\pi\left[y\log y\right]_1^e - \frac{2}{a^2}\pi(e-1)$$

$$= \underline{\frac{2(3-e)}{3a^2}\pi}$$

(3) $V_1 = V_2$を解くと．$\underline{a = \frac{4(3-e)}{e^2-3}}$