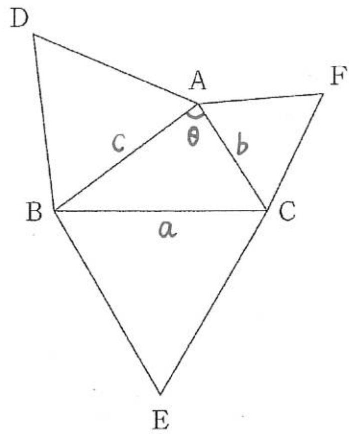
熊本大学

2016年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 下図のように，△ABCの外部に3点D，E，Fを△ABD，△BCE，△CAFがそれぞれ正三角形になるようにとる．△ABCの面積をS，3辺の長さを$\text{BC}=a$，$\text{CA}=b$，$\text{AB}=c$とおくとき，以下の問いに答えよ．



(1) $\angle\text{BAC}=\theta$とおくとき，$\sin\theta$をb，c，Sを用いて，$\cos\theta$をa，b，cを用いて表せ．

(2) DC^2をa，b，c，Sを用いて表し，$\text{DC}^2=\text{EA}^2=\text{FB}^2$が成り立つことを示せ．

(3) 3つの正三角形の面積の平均をTとおくとき，DC^2をSとTを用いて表せ．

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin\theta$ より，$\underline{\sin\theta=\frac{2S}{bc}}$ //　余弦定理より，$\underline{\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$ //

(2) 余弦定理より，

$$\begin{aligned}\text{DC}^2&=c^2+b^2-2bc\cdot\cos(\theta+60^\circ)\\&=c^2+b^2-2bc\cdot\left(\cos\theta\cdot\frac{1}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\&=c^2+b^2-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\sqrt{3}\cdot 2S\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+2\sqrt{3}S\end{aligned}$$

△ADCと△ABFにおいて，$\text{AD}=\text{AB}$，$\text{AC}=\text{AF}$

$\angle\text{DAC}=\angle\text{BAF}\ (=\theta+60^\circ)$

∴ △ADC ≡ △ABF

よって，$\text{DC}=\text{FB}$ より，$\text{DC}^2=\text{FB}^2$

△DBCと△ABEにおいて，$\text{DB}=\text{AB}$，$\text{BC}=\text{BE}$

$\angle\text{DBC}=\angle\text{ABE}\ (=\angle\text{ABC}+60^\circ)$

∴ △DBC ≡ △ABE

よって，$\text{DC}=\text{AE}$ より，$\text{DC}^2=\text{EA}^2$

以上より，$\text{DC}^2=\text{EA}^2=\text{FB}^2$ ▨

(3) $T=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}b^2\sin 60^\circ+\frac{1}{2}c^2\sin 60^\circ\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$

∴ $a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}T$

$\underline{\text{DC}^2=2\sqrt{3}(S+T)}$ //