2016年 文系 第4問

$\boxed{4}$ 2次関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

とおく．a を正の数とし，$F(x)$ が $x=a$ と $x=-a$ で極値をとるとき，以下の問いに答えよ．

(1) すべての x について $F(-x)=-F(x)$ が成り立つことを示せ．

(2) $F(x)+F(a)=0$ を満たす x をすべて求めよ．

(3) 関数 $\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ の極大値を求めよ．

(1) $F(x)$ は $x=\pm a$ で極値をとるので，$F'(x)=b(x+a)(x-a)$ と表せる（b は0以外の実数）

$\therefore F'(x)=bx^2-a^2b$

$\therefore F(x)=\dfrac{b}{3}x^3-a^2bx+c$ （c は実数）…①

ここで，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ に $x=0$ を代入して，$F(0)=0$

①より，$c=0$

$\therefore F(x)=\dfrac{b}{3}x^3-a^2bx$ なので

$F(-x)=-\dfrac{b}{3}x^3+a^2bx$

$\quad =-F(x)$ ▨

(2) $F(x)+F(a)=\dfrac{b}{3}x^3-a^2bx+\dfrac{1}{3}a^3b-a^3b$

$\quad =\dfrac{b}{3}(x^3-3a^2x-2a^3)$

$\quad =\dfrac{b}{3}(x+a)^2(x-2a)$

$\therefore F(x)+F(a)=0$ となるのは，

$\underline{x=-a,\ 2a}$ //

(3) $g(x)=\dfrac{F(x)}{F'(0)}$ とおくと，$g'(x)=\dfrac{F'(x)}{F'(0)}=\dfrac{b(x+a)(x-a)}{-a^2b}=-\dfrac{(x+a)(x-a)}{a^2}$

x	…	$-a$	…	a	…
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘		↗		↘

極大

$\therefore$ 右の増減表より，

極大値は $g(a)=\dfrac{F(a)}{F'(0)}$

$\quad =\dfrac{-\frac{2}{3}a^3b}{-a^2b}$

$\quad =\underline{\dfrac{2}{3}a}$ //