0001820639718999

旭川医科大学

数理 石井K

2014年 医学部 第1問

1 関数 $f(x) = \log(1+x^2)$ について，次の問いに答えよ.

(1) $\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx$ を求めよ.

(2) 導関数 $f'(x)$ の増減を調べ，$y = f'(x)$ のグラフの概形をかけ.

(3) 曲線 $C : y = f(x)$ と曲線 C の互いに直交している 2 本の接線とで囲まれる図形の面積 S を求めよ.

(1) $\int_0^1 (x)'\log(1+x^2)\,dx = \left[x\log(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx$

$= \log 2 - [2x]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$= \log 2 - 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$

$= \underline{\log 2 + \frac{\pi}{2} - 2}$ //

(2) $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

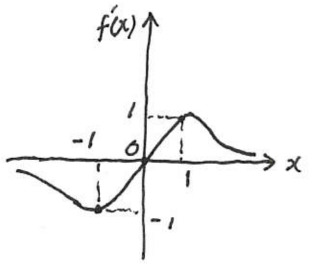
$\therefore$ $f''(x) = 0$ となるのは. $x = \pm 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	-1	↗		↘

極小　↑1 (極大)

$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$

$\therefore$ $y = f'(x)$ のグラフは右のようになる



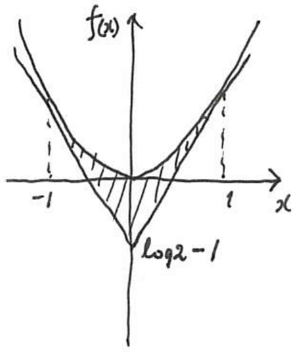
(3) (2)より. $f'(\alpha)\cdot f'(\beta) = -1$ かつ. $\alpha < \beta$ となるのは.

$\alpha = -1$, $\beta = 1$ のときのみである. ($\because$ $|f'(x)| \leqq 1$ がすべての x で成り立つ)

このとき. 2本の接線は.

$$\begin{cases} y = -x - 1 + \log 2 \\ y = x - 1 + \log 2 \end{cases}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗



$\therefore$ $S = 2\int_0^1 \log(1+x^2) - \{+x - 1 + \log 2\}\,dx$

(1)より.

$= 2\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx + 2\int_0^1 -x+1-\log 2\,dx = \underline{\pi - 3}$ //