



2016年教育(中等教育自然科学系)第1問

1 次の問いに答えよ。

- (1) $2m^2 - n^2 - mn - m + n = 18$ を満たす自然数 m, n を求めよ。
 (2) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき $\log_{\cos \theta} \left(\tan^2 \theta + \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{3} \right) = -2$ を満たす θ を求めよ。
 (3) 袋の中に 1, 2, 3, 4, 5 の数字が 1 つずつ書かれた 5 個の玉が入っている。5 人が順にこの袋の中から玉を 1 個ずつ取り出し、玉に書かれた数字を記録する。この操作が終了したら、すべての玉を袋の中に戻し、同じ操作をもう一度行う。このとき、1 回目と 2 回目に取り出した玉に書かれた数字が同じであるという人がちょうど 3 人になる確率を求めよ。
 (4) $1 \leq x \leq 2$ とする。関数 $f(x) = \int_1^2 |t - x| dt$ を最小にする x の値を求めよ。

$$(1) (\text{左辺}) = (2m+n)(m-n) - (m-n) \\ = (2m+n-1)(m-n)$$

ここで、 m, n は自然数より、 $2m+n-1 > m-n$

$$\therefore (2m+n-1, m-n) = (18, 1), (9, 2), (6, 3)$$

このうち、 m, n が自然数となるのは、 $2m+n-1=9, m-n=2$ のときで、 $(m, n) = (4, 2)$ //

$$(2) \log_{\cos \theta} \left(\frac{3\sin^2 \theta + 3\sin \theta + \cos^2 \theta}{3\cos^2 \theta} \right) = -2 \text{ より, } \frac{3\sin^2 \theta + 3\sin \theta + \cos^2 \theta}{3\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore 3\sin^2 \theta + 3\sin \theta + 1 - \sin^2 \theta = 3$$

$$\therefore (2\sin \theta - 1)(\sin \theta + 2) = 0$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < \sin \theta < 1 \text{ なので, } \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} //$$

$$(3) \frac{5! \cdot 5C_2}{(5!)^2} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} //$$

1回目: ③ ① ⑤ ② ④

2回目: ③ ② ⑤ ① ④

$$(4) f(x) = \int_1^x x-t dt + \int_x^2 t-x dt \\ = \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_1^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_x^2$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} + 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$$

$$= x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad \therefore f(x) \text{ を最小にする } x \text{ は, } \underline{x = \frac{3}{2}} //$$

入れかえる場所のえらび方が $5C_2$ 通り