2016年 中等教育 第4問

$\boxed{4}$ a は正の定数とする．関数 $f(x)=ax-x\log x$ の最大値が1であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および (2) で求めた接線によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=a-\left(\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)$

$\quad = a-1-\log x$

$\therefore f'(x)=0 \iff \log x=a-1$

$\qquad\qquad \iff x=e^{a-1}$

x	(0)	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

右の増減表より，最大値は，$f(e^{a-1})=ae^{a-1}-e^{a-1}\cdot(a-1)=e^{a-1}$

$\therefore e^{a-1}=1$ より，$\underline{a=1}$ //

(2) (1)より $f(x)=x-x\log x$，$f'(x)=-\log x$

$\therefore$ 接点を $(t,\ t-t\log t)$ とおくと，接線は，

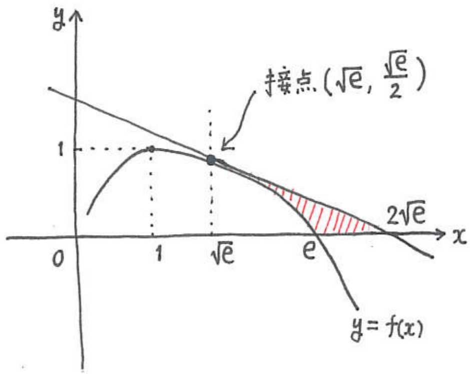
$y=-\log t\,(x-t)+t-t\log t$

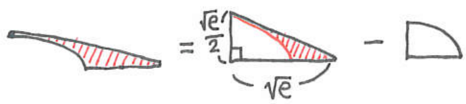
$\therefore y=-\log t\cdot x+t$

傾きは，$-\log t=-\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\sqrt{e}$

$\therefore$ 接線は $\underline{y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{e}}$ //

(3) 右図より，





$S=(\text{直角三角形})-\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} x-x\log x\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{e}\cdot\dfrac{\sqrt{e}}{2}-\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{e}}^{e}+\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\log x\,dx$

$=\dfrac{e}{4}-\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e}{2}+\left[\dfrac{x^2}{2}\log x\right]_{\sqrt{e}}^{e}-\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e}\dfrac{x}{2}\,dx$

$=\dfrac{3}{4}e-\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\left[\dfrac{x^2}{4}\right]_{\sqrt{e}}^{e}$

$=\dfrac{e}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{e}{4}$

$=\underline{\dfrac{3e-e^2}{4}}$ //