弘前大学

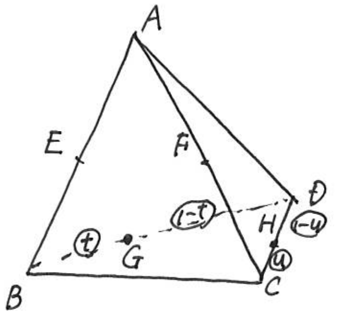
2014年 文系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 1辺の長さが1の正四面体ABCDに対し，辺ABの中点をE，辺ACの中点をF，辺BDを$t:(1-t)$の比に内分する点をG，辺CDを$u:(1-u)$の比に内分する点をHとする．ただし，$0<t<1$，$0<u<1$とする．次の問いに答えよ．

(1) 4点E，F，G，Hが同一平面上にあるならば，$t=u$が成り立つことを示せ．

(2) $t=u$のとき，$EF^2+FH^2+HG^2+GE^2$の値の範囲を求めよ．



(1) 同一平面上にあれば

$\overrightarrow{EH}=x\overrightarrow{EG}+y\overrightarrow{EF}$ と表される (x, yは実数)

$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}=(1-u)\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AE}=(1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ，$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+(1-u)\overrightarrow{AC}+u\overrightarrow{AD}=x(1-t)\overrightarrow{AB}+xt\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}x\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}y\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}y\overrightarrow{AB}$

$=\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}-xt\right)\overrightarrow{AB}+\frac{y}{2}\overrightarrow{AC}+xt\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$は一次独立より．

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{2}-xt=-\frac{1}{2} & \cdots ① \\ 1-u=\frac{y}{2} & \cdots ② \\ u=xt & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②，③より $t=u$ ■

(2) (1)より．$|\overrightarrow{EF}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+|\overrightarrow{AB}|^2\right)=\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{FH}=\left(\frac{1}{2}-t\right)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AD}$ より．$|\overrightarrow{FH}|^2=t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{HG}=(1-t)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$ $\therefore |\overrightarrow{HG}|^2=(1-t)^2$

$|\overrightarrow{GE}|^2=\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+t^2+2t\left(\frac{1}{2}-t\right)\cdot\frac{1}{2}=t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}$

$\therefore S=EF^2+FH^2+HG^2+GE^2$ とおくと，$S=3t^2-3t+\frac{7}{4}$

$S=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+1$ $(0<t<1)$ より $\underline{1\leqq S<\frac{7}{4}}$ //