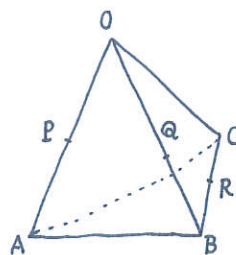


2016年文系第1問

1 四面体OABCにおいて、Pを辺OAの中点、Qを辺OBを2:1に内分する点、Rを辺BCの中点とする。P、Q、Rを通る平面と辺ACの交点をSとする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく。以下の間に答えよ。

- (1) \vec{PQ} 、 \vec{PR} をそれぞれ \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
 (2) 比 $|\vec{AS}| : |\vec{SC}|$ を求めよ。
 (3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とすると、 $|\vec{QS}|$ を求めよ。



$$(1) \vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{OQ} = \frac{2}{3}\vec{b}, \vec{OR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\therefore \vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP} \text{ より, } \underline{\vec{PQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}} //$$

$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP} \text{ より, } \underline{\vec{PR} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}} //$$

$$(2) |\vec{AS}| : |\vec{SC}| = s : 1-s \text{ とおくと, } \vec{OS} = (1-s)\vec{a} + s\vec{c}$$

$$\therefore \vec{PS} = \vec{OS} - \vec{OP} = (\frac{1}{2}-s)\vec{a} + s\vec{c}$$

ここで、点Sは平面PQR上にあるので、

$$\vec{PS} = k\vec{PQ} + l\vec{PR} \text{ と表せるので (1)より、}$$

$$\therefore (\frac{1}{2}-s)\vec{a} + s\vec{c} = -\frac{1}{2}(k+l)\vec{a} + (\frac{2}{3}k + \frac{1}{2}l)\vec{b} + \frac{1}{2}l\vec{c}$$

\vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} は互いに一次独立より、

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-s = -\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}l \\ \frac{2}{3}k + \frac{1}{2}l = 0 \\ s = \frac{1}{2}l \end{cases} \iff k = -1, l = \frac{4}{3}, s = \frac{2}{3}$$

$$\therefore |\vec{AS}| : |\vec{SC}| = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} = \underline{2 : 1} //$$

$$(3) (2) \text{より, } \vec{OS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\therefore \vec{aS} = \vec{OS} - \vec{Oa} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

四面体OABCが1辺の長さが1の正四面体のとき、 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ 、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$ より、

$$|\vec{aS}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{c}|^2 - \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{8}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{a}$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\therefore |\vec{aS}| = \underline{\frac{\sqrt{5}}{3}} //$$