福井大学

2014年 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $f(x) = 3\sin x$, $g(x) = x(2+\cos x)$ とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $0 < x < \pi$ のとき，$0 < f(x) < g(x)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で，2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と直線 $x = \pi$ によって囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $0 < x < \pi$ より，$\sin x > 0$ $\therefore f(x) > 0$

$h(x) = g(x) - f(x)$ とおくと，$h(x) = x(2+\cos x) - 3\sin x$

$\therefore h'(x) = 2 + \cos x + x(-\sin x) - 3\cos x$

$= -2\cos x - x\sin x + 2$

$h''(x) = 2\sin x - \sin x - x\cos x$

$= \sin x - x\cos x$

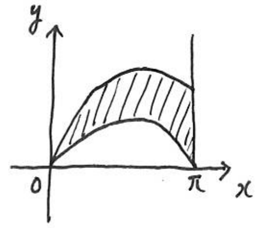
$h'''(x) = x\sin x > 0$ $\therefore h''(x)$：単調増加で，$h''(x) > h''(0) = 0$

$\therefore h'(x)$：単調増加で，$h'(x) > h'(0) = 0$

$\therefore h(x)$：単調増加で，$h(x) > h(0) = 0$

したがって，$h(x) > 0$ より，$g(x) > f(x)$ $\therefore 0 < f(x) < g(x)$ ■

(2) $S = \int_0^\pi x(2+\cos x) - 3\sin x \, dx$



$= \left[x^2 + 3\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi x(\sin x)' \, dx$

$= \pi^2 - 3 - 3 + \left[x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \, dx$

$= \pi^2 - 6 - \left[-\cos x\right]_0^\pi$

$= \pi^2 - 6 - 1 - 1$

$= \underline{\pi^2 - 8}$ //