2015年 第4問

$\boxed{4}$ $f(x)$ は x の3次多項式とし，x^3 の係数は1，定数項は0とする．2つの異なる実数 α，β に対して $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ が満たされているとする．以下の問いに答えよ．

(1) $f(\alpha)$，$f(\beta)$ を α，β を用いて表せ．

(2) 不等式 $\alpha < \beta < 3\alpha$ が成り立つとき，3次方程式 $f(x) = -1$ の実数解の個数を求めよ．

(1) $f(x) = x^3 + px^2 + qx$ （p, q は実数）と表せるので

$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$

$f'(x) = 0$ の解が α, β であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{2}{3}p, \\ \alpha\beta = \frac{1}{3}q \end{cases} \iff \begin{cases} p = -\frac{3}{2}(\alpha+\beta) \\ q = 3\alpha\beta \end{cases}$$

よって，$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)x^2 + 3\alpha\beta x$ となる．

$f(\alpha) = \alpha^3 - \frac{3}{2}(\alpha+\beta)\alpha^2 + 3\alpha^2\beta$　　$\therefore\ \underline{f(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^2(\alpha - 3\beta)}$ //

同様にして，$\underline{f(\beta) = -\frac{1}{2}\beta^2(\beta - 3\alpha)}$ //

(2) (1)より増減表は右のようになる

ここで $\alpha < \beta$ であることを用いた

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$
		極大		極小	

さらに(1)と $\beta - 3\alpha < 0$ より

$f(\beta) = -\frac{1}{2}\beta^2(\beta - 3\alpha) \geqq 0$

よって，グラフは右のようになり，

$y = f(x)$ と $y = -1$ の交点は1つである

すなわち，$f(x) = -1$ の実数解の個数は $\underline{1個}$ //