0001671368238999

熊本大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ aを正の定数とする．条件

$$\cos\theta - \sin\theta = a\sin\theta\cos\theta, \quad 0 < \theta < \pi$$

を満たすθについて，以下の問いに答えよ．

(1) 条件を満たすθは，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$の範囲で，ただ1つ存在することを示せ．

(2) 条件を満たすθの個数を求めよ．

(1) $f(\theta) = \dfrac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ とおくと，$f(\theta) = \dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta}$ なので

$$f'(\theta) = \frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{-(\sin^3\theta + \cos^3\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$\therefore$ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において．$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ より，$f'(\theta) < 0$ $\therefore$ $f(\theta)$は単調減少

また，$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \lim_{\theta\to+0} \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = +\infty$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} f(\theta) = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta} = -\infty$$

以上より，$y = f(\theta)$ と $y = a$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で，ただ1つの共有点をもつ

すなわち，条件をみたすθは．$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，ただ1つ存在する ▨

(2) (1)より．

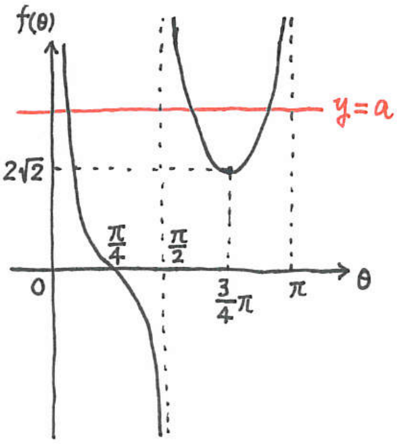
$$f'(\theta) = \frac{-(\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

(注) $1 - \sin\theta\cos\theta$ は常に正

$\therefore$ $f'(\theta) = 0$ となるのは．$\sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$

$\therefore$ $0 < \theta < \pi$ より．$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

また，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0} f(\theta) = +\infty$，$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0} f(\theta) = +\infty$



θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$-$	╳	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		↘	╳	↘	$2\sqrt{2}$	↗	

$\therefore$ 条件をみたすθの個数は $\begin{cases} 1\text{個} & (0 < a < 2\sqrt{2}\text{ のとき}) \\ 2\text{個} & (a = 2\sqrt{2}\text{ のとき}) \\ 3\text{個} & (a > 2\sqrt{2}\text{ のとき}) \end{cases}$ //