



2018年理系第3問

3 n を2以上の自然数とする. 区間 $[0, 1]$ を n 等分して, その両端と分点を順に $0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 1$ とする. 関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0, b \geq 0, c > 0$)に対して, 区間 $[x_{k-1}, x_k]$ を底辺とし, 高さが $f(x_k)$ である長方形の面積を L_k とする. ただし, $k = 1, 2, \dots, n$ である. すべての n に対して $L_1 + L_n = \frac{10}{n} + \frac{8}{n^3}$ であるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) a, b, c を求めよ.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kL_k$ を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 L_k$ を求めよ.