



2016年 医学部 (医学科) 第1問

1 $\triangle ABC$ と、 A を通り BC に平行な直線 l を考える。 k を正の数とし、直線 l 上に点 P を $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{BC}$ となるようにとる。また直線 l 上に点 Q を、線分 PB と線分 QC が1点で交わるようにとる。その交点を R とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおき、また m を $\overrightarrow{AQ} = m\overrightarrow{AP}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{AR} を \vec{b} 、 \vec{c} 、 k 、 m を用いて表せ。

(2) $|\vec{b}| = 1$ 、 $|\vec{c}| = 2$ 、 $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$ 、 $m = -1$ とする。 \overrightarrow{BR} と \overrightarrow{CR} が直交するとき、 k の値を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$$

$$= k\overrightarrow{BC} - m \cdot k\overrightarrow{BC}$$

$$= k(1-m)\overrightarrow{BC}$$

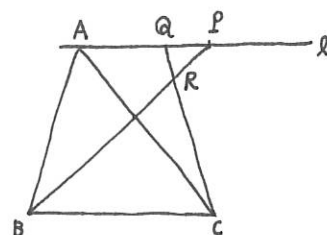
ここで線分 PB と線分 QC が1点で交わるので、 $m < 1 \therefore 1-m > 0$

$$\therefore BC : QP = 1 : k(1-m)$$

$l \parallel BC$ より、 $\triangle QPR \sim \triangle CBR \therefore PR : BR = k(1-m) : 1$

$$\therefore \overrightarrow{AR} = \frac{k(1-m)}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{1}{1+k(1-m)} \overrightarrow{AP}$$

$$= \frac{-km}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{k}{1+k(1-m)} \vec{c}$$



$$(2) \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BAC = \frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{AR} - \vec{b} = -\frac{1+k}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{k}{1+k(1-m)} \vec{c}$$

$$\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{AR} - \vec{c} = -\frac{km}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{km-1}{1+k(1-m)} \vec{c}$$

$$\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{CR} = \left(-\frac{1+k}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{k}{1+k(1-m)} \vec{c} \right) \cdot \left(-\frac{km}{1+k(1-m)} \vec{b} + \frac{km-1}{1+k(1-m)} \vec{c} \right)$$

$$= \left\{ \frac{1}{1+k(1-m)} \right\}^2 \cdot \left\{ km(1+k) |\vec{b}|^2 + (1+k-km-2k^2m) \vec{b} \cdot \vec{c} + k(km-1) |\vec{c}|^2 \right\}$$

$m = -1$ を代入して整理すると、

$$\overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{CR} = \frac{1}{(2k+1)^2} \cdot (-2k^2 - 2k + \frac{3}{2})$$

$$\overrightarrow{BR} \perp \overrightarrow{CR} \text{ より、} \overrightarrow{BR} \cdot \overrightarrow{CR} = 0 \text{ なので、} k = -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

$$k > 0 \text{ より、} \underline{k = \frac{1}{2}}$$