



2017年理系第1問

1 原点を  $O$  とする座標空間内に3点  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$  がある. ただし,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  とする.  $\angle BAC = \theta$  とし,  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とするとき, 以下の問いに答えよ.

(1)  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  を  $a$ ,  $b$ ,  $c$  を用いて表せ.

(2) 点  $O$  を中心とする半径  $1$  の球面上の点を  $H$  とする. ベクトル  $\vec{HA}$ ,  $\vec{HB}$ ,  $\vec{HC}$  がいずれもベクトル  $\vec{OH}$  に垂直であるとき,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

が成り立つことを示せ.

(3) (2) の条件のもとで  $a = 3$  としたとき, 面積  $S$  の最小値とそのときの  $b$ ,  $c$  の値を求めよ.