



2011年理系第3問

3 次の条件によって定められる関数の列 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) を考える.

$$f_0(x) = 1$$

$$f_n(x) = 1 - \int_0^x t f_{n-1}(t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ.

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ.

(2) $n \geq 1$ のとき、 $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ は x についての次数が $2n$ の単項式となることを示し、その単項式を求めよ.

(3) $n \geq 1$ のとき、不等式

$$\frac{1}{2} \leq f_n(1) \leq \frac{5}{8}$$

が成り立つことを示せ.