

2010年理系第3問

3 単位行列  $E$  の実数倍ではない行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  を考える.  $A$  で表わされる  $xy$  平面上の移動を  $f$  とする.

- (1)  $A^2 = kE$  を満たす実数  $k$  が存在するための必要十分条件は,  $a + d = 0$  であることを示せ.
- (2)  $a + d = 0$  のとき, 原点  $O$  とは異なる点  $P$  で,  $f(P)$  が直線  $OP$  上にあるものが存在すれば,  $a^2 + bc \geq 0$  であることを示せ.
- (3)  $a + d = 0$  かつ  $a^2 + bc \geq 0$  であるとする. このとき  $\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$  とおけば,  $(A - \lambda E)(A + \lambda E) = O$  が成り立つことを示せ. ただし,  $O$  は零行列とする.
- (4) (3) の仮定のもとで,  $\lambda = \sqrt{a^2 + bc}$  とおく. 原点  $O$  とは異なる点  $P$  で,  $Q = f(P)$  とすれば,  $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$  となるものが存在することを示せ.