埼玉大学

2014 年 教育・経済学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 直角三角形でない三角形 ABC において，頂点 A，B，C に対応する角の大きさを A，B，C で表すことにする．このとき，次の 3 つの等式が成り立つことを証明せよ．

(1) $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} = 1 - \dfrac{1}{\tan B \tan C}$

(2) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(3) $\dfrac{\cos A}{\sin B \sin C} + \dfrac{\cos B}{\sin C \sin A} + \dfrac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2$

(1) (右辺) $= 1 - \dfrac{\cos B \cos C}{\sin B \sin C}$

$= \dfrac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$

$= \dfrac{-\cos(B+C)}{\sin B \sin C}$

$A+B+C=\pi$ より

$= \dfrac{-\cos(\pi - A)}{\sin B \sin C}$

$= \dfrac{\cos A}{\sin B \sin C}$

$=$ (左辺) ▨

(2) (左辺) − (右辺)

$= \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C$

$= \dfrac{\sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B}{\cos A \cos B \cos C}$

$\quad - \dfrac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\sin A(\cos B \cos C - \sin B \sin C) + \cos A(\sin B \cos C + \cos B \sin C)}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\sin A \cos(B+C) + \cos A \sin(B+C)}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C}$

$= \dfrac{\sin \pi}{\cos A \cos B \cos C}$

$= 0$ ▨

(3) (1) より

(左辺) $= 1 - \dfrac{1}{\tan B \tan C} + 1 - \dfrac{1}{\tan C \tan A} + 1 - \dfrac{1}{\tan A \tan B}$

$= 3 - \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C}{\tan A \tan B \tan C}$

(2) より．

$= 3 - 1$

$= 2$ ▨