

2015年 情報科学・知的財産 第4問

 数理
石井

 4 関数 $f(x) = -x^2 + 2ax - 2a^2 + a + 2$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (1) 2次方程式 $f(x) = 0$ が実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
 (2) 定積分 $I = \int_0^a f(x) dx$ を a の式で表せ。
 (3) a の値が (1) で求めた範囲にあるとき、(2) で定めた I が最小となるような a の値を求めよ。

(1) 判別式を D とおくと、

$$D/4 = a^2 + (-2a^2 + a + 2) \geq 0$$

$$\therefore a^2 - a - 2 \leq 0$$

$$(a-2)(a+1) \leq 0 \quad \therefore \underline{-1 \leq a \leq 2} //$$

$$\begin{aligned} (2) I &= \int_0^a -x^2 + 2ax - 2a^2 + a + 2 dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + ax^2 + (-2a^2 + a + 2)x \right]_0^a \\ &= -\frac{a^3}{3} + a^3 - 2a^3 + a^2 + 2a \\ &= \underline{-\frac{4}{3}a^3 + a^2 + 2a} // \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) I'(a) &= -4a^2 + 2a + 2 \\ &= -2(2a^2 - a - 1) \\ &= -2(2a+1)(a-1) \end{aligned}$$

a	-1	...	$-\frac{1}{2}$...	1	...	2
$I'(a)$		-	0	+	0	-	
$I(a)$			$\downarrow -\frac{7}{12}$		\nearrow		$\downarrow -\frac{8}{3}$

$$-\frac{7}{12} > -\frac{8}{3} \text{ より } I \text{ が最小となるのは } \underline{a=2} //$$