0002207092977999

# 静岡大学

2016年 理（物・化）・工・情報 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ $i$ を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数 $c = 1 + i$ について，$c$ と共役な複素数 $\overline{c}$ および $|c|^2$ をそれぞれ求めよ．

(2) 複素数 $z$ が $|z| = 1$ を満たすとする．このとき，$z + \dfrac{1}{z}$ が実数であることを証明せよ．

(3) $\alpha$，$\beta$ を複素数として $\alpha$ の実部と虚部がともに正であるとする．また，$|\alpha| = |\beta| = 1$ とする．複素数 $i\alpha$，$\dfrac{i}{\alpha}$，$\beta$ で表される複素数平面上の3点が，ある正三角形の3頂点であるとき，$\alpha$，$\beta$ をそれぞれ求めよ．

(1) $\underline{\overline{c} = 1 - i,\ |c|^2 = 2}$ //

(2) $|z| = 1$ より．$z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と表せる．

$$z + \frac{1}{z} = \cos\theta + i\sin\theta + (\cos\theta + i\sin\theta)^{-1}$$

ド・モアブル

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= 2\cos\theta \ （実数） \ ▨$$

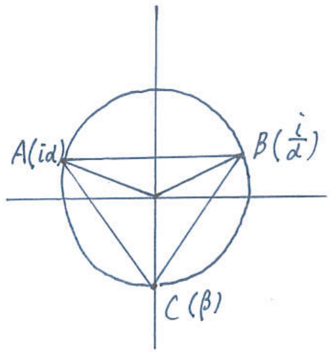
(3) $\alpha$ は実部が正，虚部が正，$|\alpha| = 1$ より．$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ と表せる．

このとき．$i\alpha = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$，$\dfrac{i}{\alpha} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

$A(i\alpha)$，$B\left(\frac{i}{\alpha}\right)$，$C(\beta)$ とすると．$|i\alpha| = \left|\frac{i}{\alpha}\right| = |\beta| = 1$ であるから

正三角形ABCは単位円に内接する．原点をOとすると．

$\angle AOB = \left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{2\pi}{3}$ であるから．$\theta = \frac{\pi}{3}$




よって，$i\alpha = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\frac{i}{\alpha} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\therefore \beta = i\alpha \cdot \left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= -i$$

$\therefore$ $\underline{\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta = -i}$ //