0001952907408999

北九州市立大学

2014年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とし，S_n が次の式で与えられるとする．

$$S_n = a_n + 2n^2 - n - 1$$

また，数列 $\{b_n\}$ は次の条件によって与えられるとする．

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} = 2b_n + a_n$$

以下の問題に答えよ．

(1) n が 2 以上の自然数のとき，S_{n-1} を n の式で表せ．
(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．
(4) n が 2 以上の自然数のとき，不等式 $b_n > 0$ を証明せよ．
(5) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする．T_n を n の式で表せ．

(1) $S_{n-1} = S_n - a_n$ より，$\underline{S_{n-1} = 2n^2 - n - 1}$ //

(2) $n \geqq 2$ のとき．(1)より．$S_{n-1} = 2n^2 - n - 1$ また，$S_n = 2(n+1)^2 - (n+1) - 1$

∴ 引くと．$S_n - S_{n-1} = 2(2n+1) - 1$ ∴ $a_n = 4n+1$ $(n \geqq 2)$

(与式)に $n=2$ を代入すると，$a_1 = 5$ ∴ $n=1$ のときもまとめて．$\underline{a_n = 4n+1}$ //

(3) $b_{n+1} + 4(n+1) + 5 = 2\{b_n + 4n + 5\}$

∴ 数列 $\{b_n + 4n + 5\}$ は 初項 7，公比 2 の等比数列．

∴ $b_n + 4n + 5 = 7 \cdot 2^{n-1}$ ∴ $\underline{b_n = -4n - 5 + 7 \cdot 2^{n-1}}$ //

(4) 数学的帰納法で示す

(i) $n=2$ のとき．$b_2 = 1 > 0$ ∴ 成り立つ

(ii) $n=k$ のとき 成り立つと仮定すると，$b_k > 0$

∴ $b_{k+1} = 2b_k + 4n + 1 > 0$ ∴ $n = k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii)より．$n \geqq 2$ に対して $b_n > 0$ ■

(5) $T_n = \sum_{k=1}^{n} -4k - 5 + 7 \cdot 2^{k-1} = -2n(n+1) - 5n + 7 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = \underline{7 \cdot 2^n - 2n^2 - 7n - 7}$ //