

2015年基礎工第2問



2 原点を O とする座標空間内に 2 点 $A(3, -2, 1)$, $B(1, 2, 5)$ を定め, t を実数として, z 軸上を動く点 $P(0, 0, t)$ をとる.

- (1) 線分 AB の長さは $\boxed{\text{ア}}$ である.
- (2) 線分 AP の長さ⁵と線分 BP の長さ²が等しくなるのは $t = \boxed{\text{イ}}$ のときである.
- (3) $\angle APB$ が直角となるのは $t = \boxed{\text{ウ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ のときである.
- (4) $\triangle ABP$ の面積が最小となるのは $t = \frac{\boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ のときである.

$$(1) \vec{AB} = (-2, 4, 4) \quad \therefore |\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = \underline{6}$$

$$(2) \vec{AP} = (-3, 2, t-1), \quad \vec{BP} = (-1, -2, t-5)$$

$$\therefore |\vec{AP}|^2 = |\vec{BP}|^2 \text{ より, } 9 + 4 + (t-1)^2 = 1 + 4 + (t-5)^2 \quad \therefore \underline{t=2}$$

$$(3) \vec{AP} \perp \vec{BP} \text{ より } \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{BP} &= 3 - 4 + (t-1)(t-5) \\ &= t^2 - 6t + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore t^2 - 6t + 4 = 0 \quad \therefore \underline{t = 3 \pm \sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} (4) \Delta_{ABP} &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AP}|^2 |\vec{BP}|^2 - (\vec{AP} \cdot \vec{BP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(t^2 - 2t + 14)(t^2 - 10t + 30) - (t^2 - 6t + 4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{t^4 - 12t^3 + 64t^2 - 200t + 420 - (t^4 - 12t^3 + 44t^2 - 48t + 16)} \\ &= \sqrt{5t^2 - 38t + 101} \\ &= \sqrt{5\left(t - \frac{19}{5}\right)^2 + \frac{144}{5}} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle ABP \text{ の面積が最小となるのは, } \underline{t = \frac{19}{5}}$$