大阪府立大学

2015 年 第 4 問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=\frac{e^{x+1}+e^{-x-1}}{2}$$

で定める．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線に関して，直線 $x=t$ を対称移動した直線を ℓ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

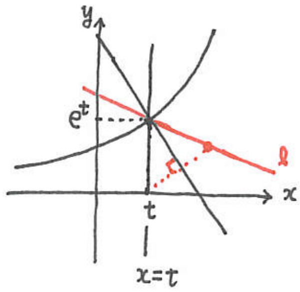
(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) ℓ は曲線 $y=g(x)$ に接することを示し，その接点の x 座標を求めよ．

(3) (2) で求めた接点を P とする．ℓ と曲線 $y=f(x)$，および P を通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．t が実数全体を動くとき，$S(t)$ の最小値を求めよ．

(1) $f'(x)=e^x$ より，$f'(t)=e^t$

$\therefore$ 法線の傾きは，$-e^{-t}$，法線は $y=-e^{-t}(x-t)+e^t$



法線に関してA$(t,0)$ を対称移動した点をB(u,v) とおくと

$\dfrac{v}{u-t}=e^t$ (AB⊥法線より)　$\therefore\ v=e^t(u-t)\ \cdots①$

$\dfrac{v}{2}=-e^{-t}\left(\dfrac{u+t}{2}-t\right)+e^t$ (線分ABの中点が法線上にあることより)

$\therefore\ v=-e^{-t}(u-t)+2e^t\ \cdots②$

①, ② より，$e^t(u-t)=-e^{-t}(u-t)+2e^t$

$\therefore\ (u-t)(e^t+e^{-t})=2e^t$　$\therefore\ u=t+\dfrac{2e^t}{e^t+e^{-t}}$　① より $v=\dfrac{2e^{2t}}{e^t+e^{-t}}$

ℓ は (t, e^t) と $\left(t+\dfrac{2e^t}{e^t+e^{-t}},\ \dfrac{2e^{2t}}{e^t+e^{-t}}\right)$ を通るので

$$\ell:\ y=\frac{\dfrac{2e^{2t}}{e^t+e^{-t}}-e^t}{t+\dfrac{2e^t}{e^t+e^{-t}}-t}(x-t)+e^t\qquad \therefore\ \ell:\ y=\underline{\frac{e^t-e^{-t}}{2}(x-t)+e^t}\ /\!/$$

(2) $g'(x)=\dfrac{e^{x+1}-e^{-x-1}}{2}$　$\therefore\ \ell$ の傾きと等しくなるのは $x=t-1$ のとき．$\therefore\ (t-1, g(t-1))$ での接線は，

$y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\{x-(t-1)\}+\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$　$\therefore\ y=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}(x-t)+e^t$

これは ℓ の方程式であるから，ℓ は $y=g(x)$ に接する ▨　接点の x 座標は $\underline{t-1}$ //

0002140549587999

大阪府立大学

2015年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$，$g(x)$ をそれぞれ

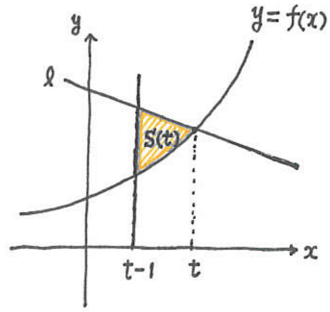
$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{2}$$

で定める．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における法線に関して，直線 $x = t$ を対称移動した直線を ℓ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) ℓ は曲線 $y = g(x)$ に接することを示し，その接点の x 座標を求めよ．

(3) (2)で求めた接点をPとする．ℓ と曲線 $y = f(x)$，およびPを通り y 軸に平行な直線で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．t が実数全体を動くとき，$S(t)$ の最小値を求めよ．



(3) $S(t) = \displaystyle\int_{t-1}^{t} \frac{e^t - e^{-t}}{2}(x-t) + e^t - e^x \, dx$

$= \left[\dfrac{e^t - e^{-t}}{4}(x-t)^2 + e^t \cdot x - e^x \right]_{t-1}^{t}$

$= te^t - e^t - \dfrac{e^t - e^{-t}}{4} - (t-1)e^t + e^{t-1}$

$= \left(1 - \dfrac{e}{4}\right)e^{t-1} + \dfrac{1}{4}e^{-t}$

$2 < e < 3$ より，$\left(1 - \dfrac{e}{4}\right)e^{t-1} > 0$，$\dfrac{1}{4}e^{-t}$ なので，相加平均，相乗平均の関係より，

$S(t) \geqq 2\sqrt{\left(1 - \dfrac{e}{4}\right)e^{t-1} \cdot \dfrac{1}{4}e^{-t}}$

$= 2\sqrt{\dfrac{4-e}{16e}}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{e} - 1}$

（等号成立は，$\left(1 - \dfrac{e}{4}\right)e^{t-1} = \dfrac{1}{4}e^{-t} \iff t = \dfrac{1}{2}\{1 - \log(4-e)\}$）

$\therefore$ $S(t)$ の最小値は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{e} - 1}$ （$t = \dfrac{1}{2}\{1 - \log(4-e)\}$ のとき）//