

2014年第2問

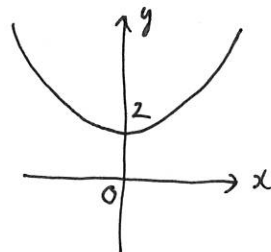
 数理
石井K

2 次の問いに答えよ.

- (1) t を実数とする. x についての方程式 $2^x + 2^{-x} = t$ の実数解の個数を調べよ.
 (2) a と b を実数とし, x についての方程式 $4^x + 4^{-x} + a(2^x + 2^{-x}) + b = 0$ が, ちょうど3個の実数解をもつとする. このとき, 点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ.

(1) $2^x + 2^{-x} \geq 2$, $y = 2^x + 2^{-x}$ は偶関数より.

$y = 2^x + 2^{-x}$ は右のようなグラフになる



∴ 実数解の個数は

$$\begin{cases} 2\text{個} & (t > 2 \text{ のとき}) \\ 1\text{個} & (t = 2 \text{ のとき}) \\ 0\text{個} & (t < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ ($t \geq 2$) とおくと.

$$t^2 - 2 + at + b = 0$$

∴ (1) より, $t = 2$ が解で, 残りの解 $t = \alpha$ は $\alpha > 2$ をみたせばよい.

$$\therefore 4 - 2 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

このとき $t^2 + at - 2a - 4 = 0$

$$\therefore (t-2)(t+2+a) = 0$$

$$\therefore \text{もう1つの解は } t = -2 - a$$

$$\therefore -2 - a > 2 \text{ より } a < -4 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, (a, b) は右のようになる.

