0002378451267999

岡山大学

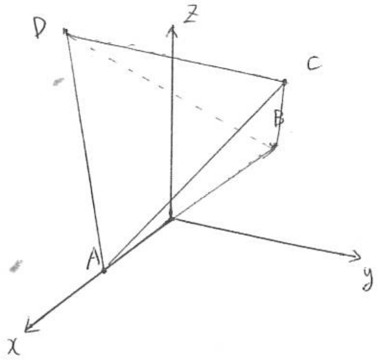
2017年 理系 第3問

増田

$\boxed{3}$ 座標空間内の4点 A(1, 0, 0), B(−1, 0, 0), C(0, 1, $\sqrt{2}$), D(0, −1, $\sqrt{2}$) を頂点とする四面体ABCDを考える．このとき以下の問いに答えよ．

(1) 点P(0, 0, t) を通り z 軸に垂直な平面と，辺ACが点Qにおいて交わるとする．Qの座標を t で表せ．

(2) 四面体ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．



(1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1, 1, \sqrt{2})$

点Qは直線AC上にあるので

$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AC} = (-k, k, \sqrt{2}k)$

とおける（k：実数）

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ}$

$= (1-k, k, \sqrt{2}k)$

Qのz座標はtなので，

$\sqrt{2}k = t \quad \therefore k = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{OQ} = \left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}, \dfrac{t}{\sqrt{2}}, t\right)$

$\therefore$ Qの座標 $\underline{\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}, \dfrac{t}{\sqrt{2}}, t\right)}$ //

(2) 四面体ABCDはx, y, z軸すべてに関して対称なので，辺ACをz軸まわりに回転したものと考えてよい。

$z=t$において，辺ACをz軸まわりに回転させた立体の切り口は，x^2+y^2の円になる。

$x = 1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}$，$y = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ を代入して．

切り口の円の半径rは

$r^2 = \left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 = t^2 - \sqrt{2}t + 1$

切り口の円の面積$S(t)$は

$S(t) = \pi r^2 = \pi(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$

求める体積Vは，tが$0 \sim \sqrt{2}$まで$S(t)$を足しあげたもので，

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} S(t)\,dt$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (t^2 - \sqrt{2}t + 1)\,dt$$

$$= \pi \left[\frac{t^3}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi} \ //$$