

東北学院大学



2014年文系第5問

5 $(\sqrt{7}x^2 + \frac{1}{49})^{50}$ の展開式について、次の問いに答えよ。

- (1) x^{96} の係数を $a \times 7^b$ の形に表せ。ただし、 a, b は自然数とし、 a は7の倍数でないとする。
- (2) 係数が自然数になる項の個数を求めよ。

(1) x^{2n} の係数は二項定理より $(\sqrt{7})^n \cdot (\frac{1}{49})^{50-n} \cdot {}_{50}C_n$

$$\begin{aligned} \therefore n = 48 \text{ を代入して } (\sqrt{7})^{48} \cdot 7^{2(48-50)} \cdot {}_{50}C_{48} \\ \therefore 7^{24} \cdot 7^{-4} \cdot \frac{{}_{50}C_{48}}{2} = \underline{25 \cdot 7^{22}} \end{aligned}$$

(2) (1)より x^{2n} の係数は

- $n = 2k$ (k は $0 \leq k \leq 25$ をみたす) ~~整数~~ _{整数} と表されることが必要。

$$\begin{aligned} (\sqrt{7})^{2k} \cdot 7^{-2(50-2k)} \cdot {}_{50}C_{2k} &= 7^{5k-100} \cdot {}_{50}C_{2k} \\ &= 7^{5k-100} \cdot \frac{50!}{(2k)!(50-2k)!} \end{aligned}$$

$50!$ は 8回7でゆれるので、 $5k-100 \geq -8 \therefore k \geq 19$

(i) $k=19$ のとき、(係数) = $7^{-5} \cdot {}_{50}C_{38} = 7^{-5} \cdot \frac{50!}{12! 38!}$
 $a \times 7^2$ の形 \therefore 不適

(ii) $k=20$ のとき、(係数) = ${}_{50}C_{40}$ 条件をみたす。

(iii) $k=21$ のとき、(係数) = $7^5 \cdot {}_{50}C_{42}$ 条件をみたす

(iv) $k=22$ のとき、(係数) = $7^{10} \cdot {}_{50}C_{44} \quad \simeq$

(v) $k=23$ のとき $= 7^{15} \cdot {}_{50}C_{46} \quad \simeq$

(vi) $k=24$ のとき、 $= 7^{20} \cdot {}_{50}C_{48} \quad \simeq$

(vii) $k=25$ のとき、 $= 7^{25} \quad \simeq$

\therefore (ii) ~ (vii) の 6 個