2011年 法（法），外国語（フランス・イスパニア・ロシア） 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x > 1$ とする．

$$\sqrt{\log_2 x} > \log_2 \sqrt{x}$$

を満たす x の値の範囲は $\overset{1}{\boxed{\text{ア}}} < x < \overset{16}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) x の関数

$$y = \sqrt{2}(\sin x - \cos x) - \sin x \cos x + 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える．

(i) $t = \sin x - \cos x$ とおくと，

$$y = \frac{\boxed{\text{ウ}}\,1}{\boxed{\text{エ}}\,2}t^2 + \sqrt{\underset{2}{\boxed{\text{オ}}}}\,t + \frac{\boxed{\text{カ}}\,1}{\boxed{\text{キ}}\,2}$$

が成り立つ．

(ii) $x = \dfrac{\boxed{\text{ク}}\,1}{\boxed{\text{ケ}}\,2}\pi$ で y は最大値 $\underset{1}{\boxed{\text{コ}}} + \sqrt{\underset{2}{\boxed{\text{サ}}}}$ をとり，$x = \dfrac{\boxed{\text{シ}}\,-1}{\boxed{\text{ス}}\,4}\pi$ で y は最小値 $\dfrac{\overset{-1}{\boxed{\text{セ}}}}{\underset{2}{\boxed{\text{ソ}}}}$ をとる．

(1) $\sqrt{\log_2 x} > \log_2 x^{\frac{1}{2}}$ より．

$\sqrt{\log_2 x} > \frac{1}{2}\log_2 x$

両辺とも正なので，2乗して．

$\log_2 x > \frac{1}{4}(\log_2 x)^2$

$\therefore \log_2 x(\log_2 x - 4) < 0$

$\therefore 0 < \log_2 x < 4$

$\therefore \underline{1 < x < 16}$ //

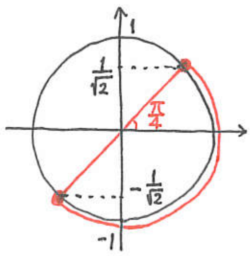
(2)(i) $t = \sin x - \cos x$ の両辺を2乗して．$t^2 = \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x$

よって．$\sin x \cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$

$\therefore y = \sqrt{2}t - \dfrac{1-t^2}{2} + 1$ $\qquad$ $\therefore \underline{y = \frac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{1}{2}}$ //

(ii) $t = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

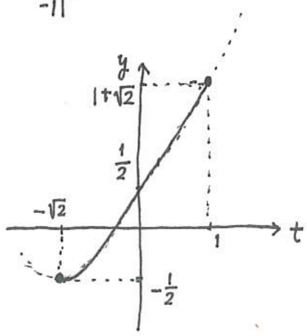
$= \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



いま，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より．$-\frac{3}{4}\pi \leqq x - \frac{\pi}{4} \leqq \frac{\pi}{4}$ なので

右の図より．$-1 \leqq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち．$-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$

$\therefore$ (i) より．$y = \frac{1}{2}t^2 + \sqrt{2}t + \frac{1}{2}$ $(-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1)$ を考えると．



$y = \frac{1}{2}(t + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{2}$

右のグラフと．$t = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ と $t = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ より．

$\underline{x = \frac{1}{2}\pi \text{ で } y \text{ は最大値 } 1+\sqrt{2} \text{ をとり．} x = -\frac{\pi}{4} \text{ で } y \text{ は最小値 } -\frac{1}{2} \text{ をとる}}$ //