



2013 年 医学部 第 4 問

4 オ , タ , チ , ト , ナ の解答は対応する解答群の中から最も適当なものを 1 つ選べ.

条件 $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ と漸化式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \quad \dots\dots(*)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められる数列の一般項を, 以下の要領で求めてみよう.

(1) 漸化式 (*) より, ベクトル $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{b}_{n+1} = A\vec{b}_n + \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立する. ただし, 行列 A は $A = \begin{pmatrix} \text{ア} & \text{イウ} \\ \text{エ} & 0 \end{pmatrix}$ である.

この式の両辺に, A の逆行列 A^{-1} を左から n 回かけると

$$(A^{-1})^n \vec{b}_{n+1} = (A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n + (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり, $(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n$ の階差数列がわかる. これより, 2 以上の整数 n に対し,

$$(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n = \vec{b}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(**)$$

を得る.

(2) (**) 式の右辺第一項は $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \text{カ} \\ \text{キ} \end{pmatrix}$ であり, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{ク} & \text{ケ} \\ \text{コサ} & \text{シ} \end{pmatrix}$ は行列 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{\text{ス}}{\text{セ}} & 0 \\ 0 & \text{ソ} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されるので, (**) 式右辺の和の項について, 次式が成立する.

$$\sum_{k=1}^{n-1} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \log_2 \text{タ} \\ -2^n \log_2 \text{チ} \end{pmatrix}$$



(3) (2)の結果と、行列 A が同じ P を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表わされることに注意すると、(**) 式の両辺に行列 A を左から $(n-1)$ 回かけて得られる \vec{b}_n から、一般項 a_n は

$$a_n = 2^{\boxed{\text{ト}}} \log_2 \boxed{\text{ナ}}$$

($n = 2, 3, 4, \dots$) となる.

$\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ の解答群

- | | | | |
|-----------------------------|----------|----------------------|-----------|
| ① $n-1$ | ② n | ③ $n+1$ | ④ $1-n$ |
| ⑤ $-n$ | ⑥ $-n-1$ | ⑦ $\frac{n(n+1)}{2}$ | ⑧ n^2-1 |
| ⑨ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ | | | |

$\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

- | | | | |
|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| ① $n-1$ | ② n | ③ $\frac{n+1}{n}$ | ④ $\frac{4n-6}{n}$ |
| ⑤ n^2-4n+5 | ⑥ $(n-1)!$ | ⑦ $n!$ | ⑧ $n!-1$ |
| ⑨ $(n-1) \times n!$ | ⑩ $n \times n!$ | | |