



2013年医学部第4問

4 , , , ,  の解答は対応する解答群の中から最も適当なものを1つ選べ.

条件  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$  と漸化式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \quad \dots\dots(*)$$

( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定められる数列の一般項を, 以下の要領で求めてみよう.

(1) 漸化式(\*)より, ベクトル  $\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$  に対して

$$\vec{b}_{n+1} = A\vec{b}_n + \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成立する. ただし, 行列  $A$  は  $A = \begin{pmatrix} \text{ア} & \text{イウ} \\ \text{エ} & 0 \end{pmatrix}$  である.

この式の両辺に,  $A$  の逆行列  $A^{-1}$  を左から  $n$  回かけると

$$(A^{-1})^n \vec{b}_{n+1} = (A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n + (A^{-1})^n \begin{pmatrix} 2^n \log_2 \frac{(n+1)^2}{n} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり,  $(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n$  の階差数列がわかる. これより, 2以上の整数  $n$  に対し,

$$(A^{-1})^{n-1} \vec{b}_n = \vec{b}_1 + \sum_{k=1}^{\text{オ}} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots(**)$$

を得る.

(2) (\*\*) 式の右辺第一項は  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \text{カ} \\ \text{キ} \end{pmatrix}$  であり,  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \text{ク} & \text{ケ} \\ \text{コサ} & \text{シ} \end{pmatrix}$  は行列  $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

を用いて

$$A^{-1} = P \begin{pmatrix} \text{ス} & 0 \\ \text{セ} & \text{ソ} \\ 0 & \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表されるので, (\*\*) 式右辺の和の項について, 次式が成立する.

$$\sum_{k=1}^{\text{オ}} (A^{-1})^k \begin{pmatrix} 2^k \log_2 \frac{(k+1)^2}{k} \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \log_2 \text{タ} \\ -2^n \log_2 \text{チ} \end{pmatrix}$$



(3) (2)の結果と、行列  $A$  が同じ  $P$  を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} \boxed{\text{ツ}} & 0 \\ 0 & \boxed{\text{テ}} \end{pmatrix} P^{-1}$$

と表わされることに注意すると、(\*\*) 式の両辺に行列  $A$  を左から  $(n-1)$  回かけて得られる  $\vec{b}_n$  から、一般項  $a_n$  は

$$a_n = 2^{\boxed{\text{ト}}} \log_2 \boxed{\text{ナ}}$$

( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) となる.

$\boxed{\text{オ}}$ ,  $\boxed{\text{ト}}$  の解答群

- |                             |          |                      |           |
|-----------------------------|----------|----------------------|-----------|
| ① $n-1$                     | ② $n$    | ③ $n+1$              | ④ $1-n$   |
| ⑤ $-n$                      | ⑥ $-n-1$ | ⑦ $\frac{n(n+1)}{2}$ | ⑧ $n^2-1$ |
| ⑨ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ |          |                      |           |

$\boxed{\text{タ}}$ ,  $\boxed{\text{チ}}$ ,  $\boxed{\text{ナ}}$  の解答群

- |                     |                 |                   |                    |
|---------------------|-----------------|-------------------|--------------------|
| ① $n-1$             | ② $n$           | ③ $\frac{n+1}{n}$ | ④ $\frac{4n-6}{n}$ |
| ⑤ $n^2-4n+5$        | ⑥ $(n-1)!$      | ⑦ $n!$            | ⑧ $n!-1$           |
| ⑨ $(n-1) \times n!$ | ⑩ $n \times n!$ |                   |                    |